

ENONCE :

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 3$

$$\text{et pour tout entier naturel } n, \quad U_{n+1} = 5U_n - 8.$$

Démontrer par récurrence que , pour tout entier naturel n , on a : $U_n = 2 + 5^n$.

Éléments de correction

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 3$

$$\text{et pour tout entier naturel } n, \quad U_{n+1} = 5U_n - 8.$$

Démontrons par récurrence que , pour tout entier naturel n , on a : $U_n = 2 + 5^n$.

Considérons la propriété : $\mathcal{P}_n$: « $U_n = 2 + 5^n$ » .

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $U_0 = 3 = 2 + 5^0$.
- Supposons que $\mathcal{P}_p$ soit vraie pour un entier naturel p .

$$\text{Alors on a : } U_p = 2 + 5^p .$$

$$\text{Or } U_{p+1} = 5U_p - 8 = 5(2 + 5^p) - 8 = 10 + 5^{p+1} - 8 = 2 + 5^{p+1}$$

Donc $\mathcal{P}_{p+1}$ est donc vraie . La propriété est héréditaire .

CONCLUSION : Pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}_n$ est vraie .